

Sorozatok határértéke

A HATÁRÉRTÉK FOGALMA, KÜSZÖBSZÁM KERESÉSE

Bevezető példa:

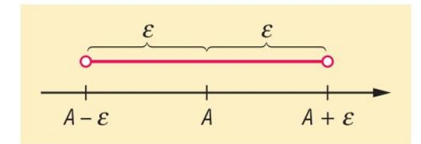
1. Mit mondhatunk az $a_n = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ általános tagú sorozatról korlátosság, monotonitás szempontjából? Mit tapasztalunk a sorozat tagjait vizsgálva?

Megjegyzés:

Példánk lehetőséget ad a határérték fogalmának bevezetésére. Tekintsünk a 3 körül egy kicsiny, $\frac{2}{1000}$ hosszúságú intervallumot: $\left]3 - \frac{1}{1000}; 3 + \frac{1}{1000}\right[$ Vizsgáljuk meg, hogy milyen n -ekre esnek a sorozat tagjai ezen intervallumba.

A határérték fogalma:

- ▶ **Definíció:** Egy A valós szám $\varepsilon(> 0)$ sugarú környezetén az $]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$ nyílt intervallumot értjük.
- ▶ **Definíció:** Az $\{a_n\}$ sorozatnak határértéke az A szám, ha bármely (az A számot tartalmazó) $]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$ ($\varepsilon(> 0)$) intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van.
- ▶ **Definíció:** Az $\{a_n\}$ sorozatnak határértéke az A szám, ha minden $\varepsilon>0$ -hoz van olyan N természetes szám, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$. Az ε -tól függő N számot küszöbszámnak nevezzük.
- ▶ **Jelölés:** $a_n \rightarrow A$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$
- ▶ Az olyan sorozatokat, amelyeknek van határértéke konvergens sorozatoknak nevezzük.



4. ábra

A határérték fogalma:

Megjegyzések:

- ▶ Mivel arra vagyunk kíváncsiak, hogy a sorozat minden határon túl megközelíti-e a határértéket, ε -t igen kicsinek választjuk.
- ▶ A sorozat határértéke nem feltétlenül eleme a sorozatnak (lásd bevezető példa).
- ▶ A határérték fogalmára megadott második definíciót Cauchy-féle definíciónak nevezik.
- ▶ A küszöbszám függ a környezet sugarától: minél szűkebb a környezet, annál későbbi taggal lép be a sorozat a környezetbe (N annál nagyobb).
- ▶ **Tétel:** A sorozat konvergenciájára adott két definíció ekvivalens (egyenértékű).

Feladatok:

2. Vizsgáljuk meg az $a_n = (-1)^n$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából! Konvergens-e a sorozat?
3. Adjunk ε -hoz küszöbszámot, ha tudjuk, hogy $a_n \rightarrow A$:
 - a) $a_n = 4 - \frac{1}{n}$, $A=4$ és $\varepsilon = 0,1$;
 - b) $b_n = \frac{2n+3}{n}$, $B=2$ és $\varepsilon = 0,01$;
 - c) $c_n = \frac{3n+2}{n-100}$, $C=3$ és $\varepsilon = 0,001$.
4. Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az $a_n = \frac{4n+5}{2n-1}$ sorozatot. Adjunk $\varepsilon = 0,002$ -höz küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke 2.

Házi feladat:

1. Vizsgáld meg az $a_n = \frac{3n+1}{n}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából! Adj az $\varepsilon = 0,02$ -höz küszöbszámot, ha tudjuk, hogy a sorozat határértéke 3.

Versenyfeladatok:

1. Oldja meg az $(x^2 + 6x)^2 - 36 = (x + 3)^2 + 27$ egyenletet a pozitív valós számok halmazán!
2. Oldja meg a valós számok halmazán az $(x - 3)^4 + (x - 5)^4 = 82$ egyenletet!
3. Oldja meg a valós számok halmazán az $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$ egyenletet!